Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 6

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

a) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$ b) $\psi' = \psi - t$

c) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x-2)e^x$ d) $\dfrac{di}{dt} - 6i = 10\,\text{sen}(2t)$

e) $\dfrac{dy}{dt} = y(\dfrac{1}{t} - \text{tg}\, t) + t\cos t$ f) $(1+y^2)\dfrac{dx}{dy} = \text{arctg}\, y - x$

Resolução:

(a) Trata-se de uma equação linear em y, admite um factor integrante, $\mu(x)$ dado pela equação

$$\mu' = \mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log\mu = x \quad \Leftrightarrow \quad \mu = e^x$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^x y) = (2+2x)e^x \quad &\Leftrightarrow \quad e^x y = \int (2+2x)e^x\, dx + c \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = e^{-x}\Big(2xe^x + c\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = 2x + ce^{-x} \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(b) A equação é equivalente a

$$\psi' - \psi = -t \tag{1}$$

Esta equação admite um factor integrante, $\mu(t)$ dado por

$$\mu' = -\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \log\mu = -t \quad \Leftrightarrow \quad \mu = e^{-t}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-t}\psi) = -te^{-t} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-t}\psi = -\int te^{-t}dt + c \quad \Leftrightarrow \quad \psi(t) = e^t\Big(te^{-t} + e^{-t} + c\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \psi(t) = t + 1 + ce^t \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(c) Para $x \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{2}{x}\,y = \frac{(x-2)}{x}\,e^x \tag{2}$$

Trata-se de uma equação linear, e admite um factor integrante, $\mu(x)$ dado por

$$\mu' = \frac{2}{x}\,\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \log\mu = 2\log x \quad \Leftrightarrow \quad \mu = x^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (2) por μ obtemos

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = (x^2-2x)e^x \;\; \Leftrightarrow \;\; x^2y = \int (x^2-2x)e^x dx + c$$

$$\Leftrightarrow \;\; y(x) = \frac{1}{x^2}\Big((x^2-4x+4)e^x + c\Big)$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(d) Trata-se de uma equação linear em i, admite um factor integrante, $\mu(t)$ dado pela equação

$$\mu' = -6\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = -6 \quad \Leftrightarrow \quad \log\mu = -6t \quad \Leftrightarrow \quad \mu = e^{-6t}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ obtemos

$$\frac{d}{dx}(e^{-6t}i) = 10e^{-6t}\,\mathrm{sen}(2t) \;\; \Leftrightarrow \;\; e^{-6t}i = \int 10e^{-6t}\,\mathrm{sen}(2t)\,dt + c$$

$$\Leftrightarrow \;\; i(t) = ce^{6t} - \frac{1}{2}(\cos(2t) + 3\,\mathrm{sen}(2t))$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(e) Para $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a equação é equivalente a

$$\frac{dy}{dt} - y(\frac{1}{t} - \mathrm{tg}\,t) = t\cos t \tag{3}$$

Esta equação admite um factor integrante, $\mu(t)$ dado por

$$\mu' = -(\frac{1}{t} - \mathrm{tg}\,t)\mu \quad \Leftrightarrow \quad \log\mu = -\log t - \log\cos t \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{t\cos t}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (5) por μ obtemos

$$\frac{d}{dt}(\frac{y}{t\cos t}) = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{y}{t\cos t} = t + c$$

$$\Leftrightarrow \;\; y(t) = t(t+c)\cos t$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(f) A equação é equivalente a

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2} \operatorname{arctg} y \tag{4}$$

Esta equação admite um factor integrante, $\mu(y)$ dado por

$$\mu' = \frac{1}{1+y^2}\mu \quad \Leftrightarrow \quad \log \mu = \operatorname{arctg} y \quad \Leftrightarrow \quad \mu = e^{\operatorname{arctg} y}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (5) por μ obtemos

$$\frac{d}{dy}(e^{\operatorname{arctg} y} x) = \frac{1}{1+y^2} \operatorname{arctg} y \, e^{\operatorname{arctg} y} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\operatorname{arctg} y} x = \operatorname{arctg} y \, e^{\operatorname{arctg} y} - e^{\operatorname{arctg} y} + c$$

$$\Leftrightarrow \quad x(y) = \operatorname{arctg} y - 1 + ce^{-\operatorname{arctg} y}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy

a) $xy' = 2y + x^3 e^x \quad , \quad y(1) = 0.$

b) $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{2u}{1+u^2}v - \dfrac{1}{1+u^2} = 0, \; v(0) = 1.$

c) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

Resolução:

(a) Para $x \neq 0$, a equação é equivalente a

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$$

Admite como factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$$

Tem-se então que

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2}y) = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2}y = e^x + c$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = x^2(e^x + c)$$

Dado que $y(1) = 0$, teremos

$$0 = e + c \quad \Leftrightarrow \quad c = -e$$

e a solução do PVI é

$$y(x) = x^2(e^x - e)$$

(b) A equação é equivalente a

$$\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v = \frac{1}{1+u^2} \tag{5}$$

que admite um factor integrante, $\mu(t)$, dado pela equação

$$\mu' = \frac{2u}{1+u^2}\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2u}{1+u^2} \quad \Leftrightarrow \quad \log\mu = \log(1+u^2) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 1+u^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (5) por μ obtemos

$$\frac{d}{du}((1+u^2)v) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1+u^2)v = u+c \quad \Leftrightarrow \quad v(u) = \frac{u+c}{1+u^2}$$

Dado que $v(0) = 1$ tem-se

$$1 = c$$

e a solução do PVI é

$$v(u) = \frac{u+1}{u^2+1}$$

(c) Começemos por resolver o PVI

$$\begin{cases} x' - t = 0 \\ x(-1) = 2 \end{cases}$$

definida para $t < 0$. Dado que

$$x' = t \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{t^2}{2} + c$$

e como $x(-1) = 2$, tem-se que

$$2 = \frac{1}{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{3}{2}$$

e a solução é

$$x(t) = \frac{t^2+3}{2} \qquad , \qquad t < 0$$

Por outro lado, para $t > 0$, teremos que resolver o PVI

$$\begin{cases} x' + tx - t = 0 \\ \\ x(0) = \left.\frac{t^2+3}{2}\right|_{t=0} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

onde a condição inicial força a continuidade da soluçõo em 0. A equação é equivalente a

$$x' + tx = t \tag{6}$$

que admite um factor integrante, $\mu(t)$ dado pela equação

$$\mu' = t\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = t \quad \Leftrightarrow \quad \log\mu = \frac{t^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (6) por μ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{t^2}{2}}x) = te^{\frac{t^2}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{t^2}{2}}x = \int te^{\frac{t^2}{2}}dt + c \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^2}{2}} + c\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = 1 + ce^{-\frac{t^2}{2}} \qquad , \qquad c \in \mathbb{R}$$

Dado que $x(0) = \frac{3}{2}$, tem-se

$$\frac{3}{2} = 1 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

e a solução do PVI é

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad , \qquad t \geq 0$$

Finalmente a solução pedida é

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se} \quad t < 0 \\ \\ 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

A função x é por construção contínua. Para concluir o problema há que verificar que é continuamente diferenciável. Note-se que

$$x'(t) = t \ \text{ se } \ t < 0 \quad \text{e} \quad x'(t) = -\frac{t}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} \ \text{ se } \ t > 0$$

e que

$$x'(0^+) = \lim_{t \to 0^+} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{3}{2}}{t} = 0$$

e

$$x'(0^-) = \lim_{t \to 0^-} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^2+3}{2} - \frac{3}{2}}{t} = 0$$

Então

$$x'(t) = \begin{cases} t & \text{se} \quad t < 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 \\ \\ -\frac{t}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{se} \quad t > 0 \end{cases}$$

É agora simples de verificar que $x'(t)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

3. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de uma substância numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura da substância e a do ar. Assumindo que a temperatura do ar é 30^o e que a substância arrefece de 100^o para 70^o em 15m, determine o tempo que a substância demora a atingir a temperatura de 40^o.

Resolução:

Sendo $T(t)$ a função que representa temperatura da substância no instante t, temos que

$$\dot{T} = -k(T - 30) \qquad , \qquad T(0) = 100$$

em que t é medido em minutos, e k é a constante de proporcionalidade. Trata-se de uma equação linear não homogenea, de factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$$

Multiplicando todos os termos da equação por $\mu(t)$

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-kt}T\Big) = -30ke^{-kt} \Leftrightarrow e^{-kt}T = 30e^{-kt} + c \Leftrightarrow T(t) = 30 + ce^{kt}$$

Como $T(0) = 100$, concluimos que

$$T(t) = 30 + 70e^{kt}$$

Atendendo tambem a que $T(15) = 70$, virá

$$70 = 30 + 70e^{15k} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{\log(4/7)}{15}$$

Pretende-se determinar o instante em que a temperatura da substância é de 40^o, isto é,

$$T(t) = 40 \quad \Leftrightarrow \quad 30 + 70e^{kt} = 40 \quad \Leftrightarrow \quad kt = \log 1/7 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{15\log(1/7)}{\log(4/7)}$$

Pelo que a temperatura da substância será 40^o ao fim de aproximadamente 52m.

4. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

a) $x' = \frac{2}{t^2-1}, \quad |t| \neq 1.$

b) $x^3 + (y+1)^2\frac{dy}{dx} = 0$

c) $\varphi' = e^{\varphi - t}.$

d) $xy + (1+x^2)y' = 0$

e) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2.$

Resolução:

(a) Dado que o segundo membro não depende de x, a solução é dada por

$$x(t) = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \log\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + c$$

com $c \in \mathbb{R}$.

(b) Trata-se de uma equação separável; como tal, é equivalente à equação

$$(y+1)^2\frac{dy}{dx} = -x^3 \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{d}{dt}\Big(\int (y+1)^2\,dy\Big) = -x^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(y+1)^3}{3} = -\frac{x^4}{4} + c$$

$$\Leftrightarrow \;\; y(x) = \sqrt[3]{k - \frac{3x^4}{4}} - 1$$

com $k \in \mathbb{R}$.

(c) Trata-se de uma equação separável, como tal, é equivalente a

$$\varphi' = e^{\varphi}e^{-t} \Leftrightarrow e^{-\varphi}\varphi' = e^{-t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(\int e^{-\varphi}d\varphi\Big) = e^{-t} \Leftrightarrow -e^{-\varphi} = -e^{-t} + C$$

Resolvendo a equação em ordem a φ, obtem-se a solução geral da equação

$$\varphi(t) = -\log(e^{-t} - c)$$

(d) Para $y \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(\int \frac{1}{y}\,dy\Big) = -\frac{x}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \log y = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + c \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Note-se que a função nula, $y(x) \equiv 0$ é tambem solução da equação diferencial.

(e) A equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} y' = (1-x)(1+y^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{1+y^2} = 1 - x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\int \frac{dy}{y^2+1}\Big) = 1 - x \\ \Leftrightarrow \quad \operatorname{arctg} y = x - \frac{x^2}{2} + c \quad &\Leftrightarrow \quad y = \operatorname{tg}(x - \frac{x^2}{2} + c) \end{aligned}$$

5. Resolva o problema de Cauchy $\varphi(\theta)\varphi'(\theta) = \theta,\ \varphi(1) = \alpha$. e determine para que valores de α é que a solução está definida em todo o $\mathbb{R}$.

   Resolução:

   Trata-se de uma equação diferenciável separável, pelo que

$$\varphi\,\varphi' = \theta \Leftrightarrow \frac{d}{d\theta}\Big(\int \varphi\, d\varphi\Big) = \theta \Leftrightarrow \frac{\varphi^2}{2} = \frac{\theta^2}{2} + c \Leftrightarrow \varphi^2 = \theta^2 + c_1$$

   Para determinar c_1, usaremos o facto de $\varphi(1) = \alpha$, pelo que

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\theta^2 + \alpha^2 - 1} & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\sqrt{\theta^2 + \alpha^2 - 1} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

   Pretende-se agora determinar quais os valores de α para os quais o intervalo máximo de existência de solução do PVI seja $\mathbb{R}$. Note-se que para tal, o domínio da função φ' terá que ser $\mathbb{R}$, pelo que

$$\theta^2 + \alpha^2 - 1 > 0 \qquad , \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

   o que acontecerá se $\alpha^2 - 1 > 0$ isto é se $|\alpha| > 1$.

6. Considere a equação diferencial não-linear separável $x' = x \operatorname{sen} t + x^2 \operatorname{sen} t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.

   Resolução:

   A equação pode ser escrita na forma

$$x' = (x + x^2) \operatorname{sen} t$$

   Para $x \neq 0$ e $x \neq -1$ (podemos excluir estes dois casos visto que $x(t) \equiv 0$ e $x(t) \equiv -1$ são soluções constantes da equação que não verificam a condição inicial), tem-se

$$\frac{x'}{x + x^2} = \operatorname{sen} t \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int \left(\frac{dx}{x^2 + x} \right) dx = \operatorname{sen} t \Leftrightarrow \log \frac{x}{x+1} = -\cos t + c \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = k\, e^{-\cos t}$$

   Visto $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, temos que $k = 2$ e a solução do PVI é

$$x(t) = \frac{2\, e^{-\cos t}}{1 - 2\, e^{-\cos t}}$$

   O domínio de diferenciabilidade da função $x(t)$ é

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 1 - 2\, e^{-\cos t} \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \cup_{k \in \mathbb{Z}} \{\arccos(\log 2) + 2k\pi\}$$

   Teremos então que o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $\pi/2 \in I$. Conclui-se

$$I =]\arccos(\log 2), \arccos(\log 2) + 2\pi[$$

7. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

   em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

   a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.

   b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

   indicando o intervalo máximo de solução.

   Resolução:

   (a) Se $v = at + by + c$ e $b \neq 0$, então $y = \dfrac{v - at - c}{b}$. Substituindo na equação

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v - at - c}{b}\right) = f(v) \Leftrightarrow \dot{v} - a = bf(v) \Leftrightarrow \frac{\dot{v}}{bf(v) + a} = 1$$

   que é obviamente uma equação separável.

(b) Por (a), sendo $f(v) = e^v - 2$,com $v = 2t + y - 1$, obtem-se

$$\frac{\dot{v}}{e^v} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(\int e^{-v} dv\Big) = 1 \Leftrightarrow -e^{-v} = t + k \Leftrightarrow v(t) = -\log(-t - k)$$

Desfazendo a mudança de variável

$$2t + y - 1 = -\log(-t - k) \Leftrightarrow y(t) = 1 - 2t - \log(-t - k)$$

Dado que $y(0) = 1$, obtem-se $k = -1$ e como tal a solução do PVI é

$$y(t) = 1 - 2t - \log(1 - t)$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(t)$ é

$$D = \{t \in \mathbb{R} \, : \, 1 - t > 0\} =]-\infty, 1[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $0 \in I$. Conclui-se

$$I =]-\infty, 1[$$

8. Considere a equação diferencial

$$2x\frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-4}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

(a) Seguindo a sugestão, se $v = y^{-4}$ tem-se $y = v^{-1/4}$ e substituindo na equação

$$2x\frac{d}{dx}\Big(v^{-1/4}\Big) + 2x\Big(v^{-1/4}\Big)^5 - v^{-1/4} = 0 \Leftrightarrow -2x\frac{1}{4}v^{-5/4}\dot{v} + 2xv^{-5/4} - v^{-1/4} = 0$$

Multiplicando ambos os membros por $v^{5/4}$ e rearranjando os termos

$$\dot{v} + \frac{2}{x}v = 4 \tag{7}$$

que é uma equação linear não homogenea. O factor integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$$

Multiplicando todos os termos da equação (7) por $\mu(x)$

$$\frac{d}{dx}(x^2 v) = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 v = \frac{4x^3}{3} + c \Leftrightarrow v(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}$$

Finalmente desfazendo a mudança de variável

$$y^{-4}(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2} \Leftrightarrow y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}}}$$

com $c \in \mathbb{R}$.

(b) Dado que $y(1) = 1$, conclui-se que $y(x)$ é positivo e $c = -1/3$. Como tal a solução do PVI é dada por

$$y(x) = \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3 - 1}}$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(x)$ é

$$D = \{x \in \mathbb{R} \, : \, \frac{3x^2}{4x^3 - 1} > 0 \text{ e } 4x^3 - 1 \neq 0\} =]\sqrt[3]{1/4}, \infty[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $1 \in I$. Conclui-se

$$I =]\sqrt[3]{1/4}, \infty[$$

9. Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x \operatorname{sen} y - 1$$

Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \operatorname{sen} y$

Resolução:

Seguindo a sugestão, se $v = \operatorname{sen} y$ tem-se $\frac{dv}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$ e substituindo na equação

$$x^2 \frac{dv}{dx} = 2xv - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v = -\frac{1}{x^2}$$

para $x \neq 0$. Trata-se de uma equação linear não homogenea, de factor integrante

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

pelo que

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2} v) = -\frac{1}{x^4} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} v = \frac{1}{3x^3} + c \Leftrightarrow v(x) = \frac{1}{3x} + cx^2$$

Finalmente desfazendo a mudança de variável

$$\operatorname{sen} y = \frac{1}{3x} + cx^2 \Leftrightarrow y(x) = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{3x} + cx^2)$$

com $c \in \mathbb{R}$.